

Chapitre III

Limites de Fonctions et Continuité

Exercices pré-requis : Réviser ses gammes 1 à 5 p.41

I. Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

a. Limite infinie

Définition : On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
C'est à dire que pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) > A$.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Définition : On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $] -\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
C'est à dire que pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) < A$.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque : On peut définir de façon analogue les limites infinies en $-\infty$.

Propriétés :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- Pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est un entier impair,} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est un entier pair non nul.} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

b. Limite finie

Définition : Soit ℓ un réel.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand.
C'est à dire que pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) \in I$.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Remarque : On peut définir de façon analogue la limite finies en $-\infty$.

Propriétés :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
- Pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
- Pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Définition : Soit ℓ un réel.
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, alors on dit que la courbe représentative de la fonction f admet pour **asymptote horizontale** en $+\infty$ la droite d'équation $y = \ell$.

Remarque : On peut définir de façon analogue une asymptote horizontale en $-\infty$.

Exercices : Méthodes 1 et 2 p.45; Exercices 3 et 7 p.58.

II. Limites en un réel fini

a. Limite infinie

Définition :

Soit a un réel.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

C'est à dire que pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que si $x \in I$, alors $f(x) > A$.

On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Définition :

Soit a un réel.

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

C'est à dire que pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que si $x \in I$, alors $f(x) < A$.

On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Remarque : Certaines fonctions peuvent avoir des limites différentes à gauche et à droite de a .

Propriétés :

• Pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est un entier impair,} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est un entier pair non nul.} \end{cases}$

Définition :

Si la limite d'une fonction f à gauche et/ou à droite de a est infinie, on dit que la courbe représentative de la fonction f admet pour **asymptote verticale** la droite d'équation $x = a$.

b. Limite finie

Définition :

Soient a et ℓ deux réels.

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exercices : Méthodes 1, 2 et 3 p.47; Exercices 4, 5, 6, 8 et 9 p.58.

III. Opérations sur les limites

a. Limite d’une somme

$\lim f =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f + g) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	El.

b. Limite d’un produit

$\lim f =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim g =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim (f \times g) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	El.	El.

c. Limite d’un quotient

$\lim f =$	ℓ	ℓ	ℓ	∞	∞	0
$\lim g =$	$\ell' \neq 0$	∞	0	ℓ'	∞	0
$\lim \left(\frac{f}{g}\right) =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	El.	El.

Remarques :

- Une forme indéterminée ne signifie pas que la fonction n’a pas de limite.
- Pour savoir si un quotient tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ il faut souvent faire une étude de signe du numérateur et/ou du dénominateur.

IV. Continuité

a. Notion de continuité

Définitions : • Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .
On dit que la fonction f est **continue en a** si et seulement si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
• La fonction f est **continue sur I** si et seulement si f est continue pour tout réel de I .

b. Continuité des fonctions usuelles

Propriété : Les fonctions usuelles suivantes sont continues sur leur ensemble de définition :

Fonctions usuelles	Intervalle de continuité
$f(x) = x^n, n \in \mathbf{N}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbf{N}^*$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$
$f(x) = x $	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

Propriété : Toutes fonctions construites par somme, produit, quotient ou composition à partir des fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition.

c. Théorème des Valeurs Intermédiaires - T.V.I

Propriété : **Théorème des valeurs intermédiaires** (sur un intervalle fermé)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a ; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans I .

Corolaire : **Théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones**

Soit f une fonction continue et **strictement monotone** sur un intervalle $I = [a ; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans I .

Propriété : **Théorème des valeurs intermédiaires** (sur un intervalle ouvert)

a désigne soit un réel soit $-\infty$ et b désigne soit un réel soit $+\infty$.

• Soit f une fonction continue sur un intervalle $I =]a ; b[$.

Pour tout réel k strictement compris entre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans I .

• Si, de plus, f est strictement monotone sur I alors, cette solution est unique.