Chapitre IV
Dérivabilité

Exercices pré-requis : Réviser ses gammes 1 à 5 p.71 - Tous les exercices et méthodes vues au chapitre III.

I. Dérivabilité

a. Rappels

Définitions : • Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

On dit que la fonction f est **dérivable en a** si et seulement si la limite du taux d'accroissement de f en a est un réel fini.
On appelle cette limite **le nombre dérivé de f en a**, que l'on note $f'(a)$.

On donc : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ ou encore $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

• On dit que le fonction f est **dérivable sur I** si et seulement si elle dérivable pour tout rée de I.
Lorsque le fonction f est dérivable sur I, on note **f' la fonction dérivée de f** qui a tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Définitions : **Tangente à la courbe représentative de f en a**

Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative de la fonction f admet au point $\mathrm{A}\big(a\ ,\ f(a)\big)$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ dont l'équation est :

$$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$$

Exercices : Méthodes 1 et 2 p.75 ; Exercices 1 à 9 p.82.

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

• Si, pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$ alors, f est constante sur I.

• Si, pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$ alors, f est strictement croissante sur I.

• Si, pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$ alors, f est strictement décroissantes sur I.

b. Dérivées des fonctions usuelles

Propriété : **Dérivées des fonctions élémentaires**

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k$, avec k une constante réelle	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Propriété : **Règles de dérivation**

Dérivée d'une somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par une constante réelle k	$(ku)' = ku'$
Dérivée d'un produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée d'un inverse	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
Dérivée d'un quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée d'une puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée d'une racine	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée d'une exponentielle	$\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u$

Exercices : Méthodes 1 et 2 p.77 ; Exercices 10 à 22 p.83 ; 23 à 31 p.84, 32 à 41 p.85 ; 42 à 44 p.86 ; 45, 46 p.87 ; 47 à 58 p.88 à 93.

c. Dérivabilité et continuité

Propriété : **Dérivabilité et continuité**

Si une fonction est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur I