Chapitre I

Suites

Exercices pré-requis : Réviser ses gammes 1 à 6 p.11.

I. Comportement global d'une suite

a. Suites monotones

Définitions : **Variations**

Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite :

- **croissante** si et seulement si pour tout entier nature n, $\boldsymbol{u_n \leqslant u_{n+1}}$;
- **décroissante** si et seulement si pour tout entier nature n, $\boldsymbol{u_n \geqslant u_{n+1}}$.

Une suite est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Remarque : En pratique, pour déterminer les variations d'une suite, on étudie pour tout entier naturel n, le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b. Suites majorée, minorées, bornées

Définitions : Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite :

- **majorée** si il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n \leqslant M}$;
- **minorée** si il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n \geqslant m}$;
- **bornée** si elle est à la fois **majorée et minorée**.

II. Limites de suites

a. Limite finie et suites convergentes

Définition : **Convergence**

On dit qu'une suite (u_n) tend vers un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
On dit alors que la suite (u_n) **converge** vers ℓ et on note : $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell}$.

Propriété : **Unicité de la limite**

Si une suite converge alors sa limite est unique.

Propriétés : **Limite des suites usuelles**

- $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0}$, avec k un entier naturel non nul.
- $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0}$.

b. Suites divergentes

Définition : Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$ si, tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;A[$) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
On dit alors que la suite (u_n) **diverge** vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) et on note : $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ (respectivement $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$).

Propriétés : **Limite des suites usuelles**

- $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty}$, avec k un entier naturel non nul.
- $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty}$.

Exercices : 1 à 4 p.28.

---

c. Opérations sur les limites

(u_n) et (v_n) désignent deux suites et ℓ et ℓ' deux nombres réels finis.

Propriété : **Limite d'une somme**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Propriété : **Limite d'un produit**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Propriété : **Limite d'un quotient**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell'\neq 0$	0	∞	ℓ'	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

Remarques : • Une forme indéterminée ne signifie pas que la suite n'a pas de limite.

• Pour savoir si un quotient tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ il faut souvent faire une étude de signe du numérateur et/ou du dénominateur.

Exercices : 5 à 8 p.28 ; 9 à 17 p.29 ; 36 à 39 p.32 ; 49 p.34 ; 52 p.35 ; 56 p.37.

d. Limites et comparaison

1. Limites infinies

Propriétés : **Théorème de comparaison**

Soit n_0 un entier naturel et soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\boldsymbol{u_n \leqslant v_n}$.

- **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n = +\infty}$ **alors,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n = +\infty}$.
- **Si** $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n = -\infty}$ **alors,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n = -\infty}$.

2. Limites finies

Propriété : **Théorème des encadrements dit « des gendarmes »**

Soient n_0 un entier naturel et ℓ un réel, et soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\boldsymbol{u_n \leqslant v_n \leqslant w_n}$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{w_n = \ell}$ **alors,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n = \ell}$.

Propriété : **Inégalités et limites**

Soient n_0 un entier naturel, et ℓ et ℓ' deux réels, et soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\boldsymbol{u_n \leqslant v_n}$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n = \ell}$ **et si** $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{v_n = \ell'}$ **alors,** $\boldsymbol{\ell \leqslant \ell'}$.

Exercices : 18 et 19 p.29 ; 23 à 23 p.30 ; 45 p.32.

---

e. Suites arithétiques

Propriété : **Limites des suites arithmétiques**

Soit u_n une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

- Si $\boldsymbol{r > 0}$ alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n = +\infty}$.
- Si $\boldsymbol{r < 0}$ alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n = -\infty}$.
- Si $\boldsymbol{r = 0}$ alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n = u_0}$.

f. Suites géométriques

Propriété : **Limites des suites (q^n)**

Soit q un nombre réel.

- Si $\boldsymbol{q \leqslant -1}$ alors, $(\boldsymbol{q^n})$ **diverge** et n'admet pas de limite.
- Si $\boldsymbol{-1 < q < 1}$ alors, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0}$.
- Si $\boldsymbol{q = 1}$ alors, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1}$.
- Si $\boldsymbol{q > 1}$ alors, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty}$.

Remarque : Pour une géométrique de la forme $u_0 \times q^n$, il faut aussi tenir compte du signe de u_0 pour déterminer sa limite.

Exercices : 24 à 30 p.30 ; 40 à 44 p.32 ; 50 et 51 p.34-35 ; 53 et 54 p.36 ; 55 p.37 ; 57, 59 p.38-39.

---

g. Suites arithmético-géométriques

Définition : Une **suite arithmético-géométrique** (u_n), est une suite définie pour tout entier naturel n par $\boldsymbol{u_{n+1} = au_n + b}$, où a et b sont deux nombres réels indépendants de n.

Remarque :
- Une suite arithmético-géométrique n'a ni les propriété d'une suite arithmétique ni les propriétés d'une suite géométrique.
- Pour étudier (variations, limite ...) une suite arithmético-géométrique on étudiera une suite auxiliaire qui elle est une suite géométrique.

Exercices : 31 à 35 p.31 ; 43 p.32 ; 46, 47, 48 p.33 ; 53 p.36 ; 55, 56 p.37 ; 58 p.38 ; 60 p.39.

---

h. Suites monotones

Propriété : **Théorème de convergence des suites monotones**

- Toute suite **croissante majorée converge**.
- Toute suite **décroissante minorée converge**.
- Toute suite **croissante non-majorée diverge vers $+\infty$**.
- Toute suite **décroissante non-minorée diverge vers $-\infty$**.